1 Vektoren und Matrizen

Für die Berechnung des reduzierten Abstandes ΔP werden einige Vektor und Matrizenberechnungen verwendet. Die Addition und Subtraktion von zwei Vektoren $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ berechnet sich zu

$$\vec{p}_1 \pm \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Das Kreuzprodukt aus zwei Vektoren berechnet sich zu

$$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

und der Betrag eines Vektors zu

$$|\vec{p}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{3}$$

Über eine Rotationsmatrix $\mathbf{R}$ können Vektoren gedreht werden, z.B. vom erdfesten System $\vec{p}_{erdfest}$ in das raumfeste System $\vec{p}_{ICRF}$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ICRF} = \mathbf{R}\vec{p}_{erdfest} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

2 Bestimmung der AE aus Merkurparallaxe

Mit kleinen Parallaxenwinkeln π kann aus den Dreiecken in Abbildung 1 die Beziehung

$$\Delta P = \pi_S d_S x \tag{5}$$

für die Parallaxe der Sonne und

$$\Delta P = \pi_M d_M x \tag{6}$$

für die Parallaxe des Merkur abgeleitet werden. x bezeichnet die Astronomische Einheit und d_S/d_M den Abstand zwischen Erde und Sonne/Merkur als Skalierungsfaktor in Vielfachen der Astronomischen Einheit. Auflösen von Gleichung (5) führt zu

$$x = \frac{\Delta P}{\pi_S d_S}. \tag{7}$$

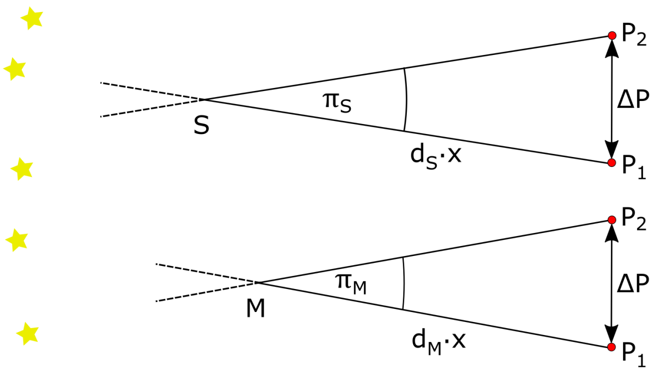

Abbildung 1: Parallaxe der Sonne π_S und Merkur π_M in Bezug auf die Hintergrundsterne

Gleichsetzen der Gleichungen (5) und (6) führt zu

$$\pi_S d_S = \pi_M d_M, \tag{8}$$

und mit $\pi_M = \pi'_M + \pi_S$ (siehe Webseite) folgt

$$\begin{aligned}
\pi_S d_S &= (\pi'_M + \pi_S) d_M \\
\pi_S \frac{d_S}{d_M} &= \pi'_M + \pi_S \\
\pi'_M &= \pi_S \frac{d_S}{d_M} - \pi_S \\
\pi'_M &= \pi_S \left(\frac{d_S}{d_M} - 1 \right) \\
\pi_S &= \frac{\pi'_M}{\left(\frac{d_S}{d_M} - 1 \right)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Einsetzen von Gleichung (9) in (7) führt zur gesuchten Formel für die AE

$$x = \frac{\Delta P}{\pi'_M d_S} \left(\frac{d_S}{d_M} - 1 \right). \tag{10}$$

3 Berechnung des reduzierten Abstandes ΔP

Der reduzierte Abstand ΔP kann über das räumliche Dreieck zwischen den beiden Stationen P_1, P_2 und Merkur berechnet werden, siehe Abbildung 2. Die Fläche des Dreieckes A kann über

$$A = \frac{1}{2} |(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times \vec{g}| \tag{11}$$

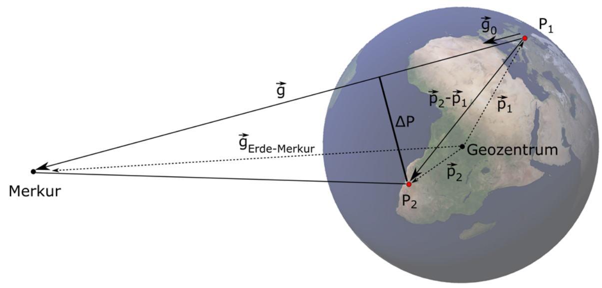

Abbildung 2: Dreieck Merkur-P_1-P_2 mit Vektoren zur Berechnung von ΔP.

oder über

$$A = \frac{1}{2}|\vec{g}|\Delta P \tag{12}$$

berechnet werden. Gleichsetzen der beiden Gleichung (11) und (12) und umstellen nach ΔP führt zu

$$\Delta P = \frac{|(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times \vec{g}|}{|\vec{g}|}. \tag{13}$$

Der Richtungsvektor $\vec{g}$ von P_1 zu Merkur wird auf die verwendete Längeneinheit, z.B. 1 km, normiert

$$\vec{g}_0 = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \tag{14}$$

und in Gleichung (13) eingesetzt

$$\Delta P = |(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times \vec{g}_0|. \tag{15}$$

Alle Vektoren müssen dabei in einem gemeinsamen Koordinatensystem vorliegen, hier wird ein von der Erdrotation unabhängiges System - der himmelfeste Referenzrahmen ICRF verwendet. Die aus GPS-Messungen bekannten Koordinaten (Länge L, Breite B und Höhe h) beziehen sich auf ein Referenzellipsoid und müssen zuerst in kartesische Koordinaten x, y, z umgerechnet werden. Die Höhenangabe der meisten Wander-GPS-Geräte, wie das verwendete Garmin, ist i.d.R. so korrigiert, dass das Gerät auf Meeresniveau eine Höhe von 0 m anzeigt. Um die wahre Höhe über dem Referenzellipsoid zu bestimmen, muss die sogenannte „Geoidhöhe“ zur Anzeige des GPS-Gerätes addiert werden. Diese kann über die Webseite des NGA EGM96 Geoid Calculator[1] für jeden Standort abgerufen werden. Mit den Ellipsoidparametern $a = 6378137$ m und $e^2 = 0.006694380$ kann über die Formeln

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N+h)\cos B \cos L \\ (N+h)\cos B \sin L \\ ((1-e^2)N+h)\sin B \end{pmatrix} \tag{16}$$

[1]http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm96/intpt.html

und

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 (\sin B)^2}} \tag{17}$$

berechnet werden. Die jetzt in kartesischen Koordinaten vorliegenden Vektoren zu den Stationen können über Gleichung (4) in das raumfeste Bezugssystem ICRF transformiert werden. Die Einträge der Rotationsmatrix **R** können auf der Webseite des Earth Orientation Centers[2] als „Orientation Matrix“ für jeden Messzeitpunkt ermittelt werden.

Der normierte Richtungsvektor zu Merkur $\vec{g}_0$ wird bei uns über die JPL Horizons Website[3] bestimmt. Hier kann z.B. der geozentrische (vom Erdmittelpunkt ausgehende) Vektor zum Merkur $\vec{g}_{Erde-Merkur}$ im benötigten Koordinatensystem ICRF ausgegeben und $\vec{g}_0$ über

$$\vec{g}_0 = \frac{\vec{g}_{Erde-Merkur} - \vec{p}_{1ICRF}}{|\vec{g}_{Erde-Merkur} - \vec{p}_{1ICRF}|} \tag{18}$$

berechnet werden. Folgende Einstellungen müssen dazu vorgenommen werden:

- **Ephemeris type**: Vector table
- **Target body**: Mercury (body center)
- **Coordinate Origin**: Geocentric
- **Time Span**: discrete times (siehe unten)
- **Table settings**: km & km/s; position components; Earth mean equator and equinox of reference epoch; ICRF/J2000.0; Astrometric states
- **Display**: HTML (default)

Bei der hier eingestellten Ausgabe müssen die Zeitpunkte in dynamisch baryzentrischer Zeit (TDB) eingegeben werden. Aus der Rückgabe des Earth Orientation Centers (s. oben) können die in internationaler Atomzeit (TAI) umgerechneten Messzeitpunkte entnommen werden. Die in einem modifizierten Julianischen Datum (MJD) zurückgegeben Zeitpunkte können näherungsweise mit

$$JD_{TDB} = MJD_{TAI} + 2400000.5 + 32.184/86400 \tag{19}$$

in ein TDB-Julianisches Datum umgerechnet und direkt in die Eingabemaske der JPL-Horizons Website eingegeben werden.

[2]https://hpiers.obspm.fr/eop-pc/index.php?index=matrice&lang=en#description
[3]http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi?s_time=1&mode=list#top